

Correction Feuille Exercice 11

Montrer qu'une fonction est continue en un point

Exercice 13

Pour étudier la continuité en 0 des fonctions, on calcule leur limite.

1. Par taux d'accroissement, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

Comme $f_1(0) = 1$ alors la fonction f_1 est continue en 0 (Si l'on veut être précis, elle est continue à droite en 0 car elle n'est pas définie à gauche).

2. On a

$$\frac{\exp(2x^2) - 1}{x} = 2x \times \frac{\exp(2x^2) - 1}{2x^2}$$

Or, par taux d'accroissement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x^2) - 1}{2x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\exp(X) - 1}{X} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

Ainsi on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0 = f_2(0)$$

Donc la fonction f_2 est bien continue en 0.

Exercice 14 (*)

Pour étudier la continuité en -1 des fonctions, on calcule leur limite.

1. On calcule pour $x \in]-1, 0[$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \sqrt{2}$$

Or $f_3(-1) = 1 \neq \sqrt{2}$.

Donc la fonction f_3 n'est pas continue en -1 .

2. On a d'un côté,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{1}{x+1} = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} f_4(x) = 0$$

et d'un autre côté

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} \frac{1}{x+1} = -\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ <}} f_4(x) = +\infty$$

La fonction f_4 est donc continue à droite en -1 mais elle n'est pas continue à gauche.

Elle n'est donc pas continue en -1 .

Exercice 15 (*)

g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

La fonction $x \rightarrow e^x$ est continue sur $] - \infty; 0[$.

La fonction $x \rightarrow x^2 + 1$ est continue sur $]0; +\infty[$. La fonction g est donc continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x^2 + 1 = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^x = 1$$

La fonction g est donc prolongeable par continuité sur \mathbb{R} en posant $g(0) = 1$.

Exercice 16 ()**

Le domaine de définition de $x \rightarrow x^x$ est \mathbb{R}_+^* . On écrit la fonction sous la forme :


$$x^x = e^{x \ln(x)}$$

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x^x = 1$$

Ainsi

la fonction est prolongeable en 0 en posant $0^0 = 1$.

 *Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle*

Exercice 17

- On a pour tout x réel, $x^2 + 1 > 0$. De plus,
 - La fonction $x \rightarrow 1 + x^2$ est continue sur \mathbb{R} ,
 - La fonction $X \rightarrow \ln(X)$ est continue sur \mathbb{R}_+^*

Donc

la fonction f_1 est continue sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions continues.

- On a

- La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur \mathbb{R}_+
- La fonction $x \rightarrow x^2 + 1$ est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur cet intervalle.

Donc

la fonction f_2 est continue sur \mathbb{R}_+ en tant que quotient de fonctions continues.

- La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^*
- La fonction $x \rightarrow x$ est continue sur \mathbb{R}
- La fonction $X \rightarrow \exp(X)$ est continue sur \mathbb{R}

Donc

la fonction f_3 est continue sur \mathbb{R}^* en tant que somme et composée de fonctions continues.

Exercice 18 (*)

1. On résout tout d'abord

$$1 - 4x^2 \geq 0 \iff (1 - 2x)(1 + 2x) \geq 0$$

L'ensemble des solutions (obtenues par un tableau de signe) est alors $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

— La fonction $x \rightarrow 1 - 4x^2$ est continue sur \mathbb{R} et positive sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

— La fonction $X \rightarrow \sqrt{X}$ est continue sur \mathbb{R}_+

Donc, par composition de fonctions,

la fonction f_4 est continue sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

On résout l'inéquation

$$2x^2 - x - 1 > 0$$

Le discriminant du polynôme $2x^2 - x - 1$ est $\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 3}{4} = 1$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$.

— La fonction $x \rightarrow 2x^2 - x - 1$ est continue sur \mathbb{R} et strictement positive sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$.

— La fonction $X \rightarrow \ln(X)$ est continue sur \mathbb{R}_+^*

Donc, par composition de fonctions,

la fonction f_5 est continue sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ et sur $]1; +\infty[$.

On résout l'équation

$$x^2 - 1 = 0 \iff (x - 1)(x + 1) = 0$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\{-1, 1\}$.

— La fonction $x \rightarrow x^2 - 1$ est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

— La fonction $x \rightarrow 2x$ est continue sur \mathbb{R}

— La fonction $X \rightarrow e^X$ est continue sur \mathbb{R}

Donc, par composition et quotient de fonctions,

la fonction f_6 est continue sur $]-\infty; -1[$, sur $] - 1; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

Exercice 19 (*)

1. On montre que la fonction f_1 est continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. En effet,

— La fonction $x \rightarrow 1 + x^2$ est continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Elle est de plus strictement positive sur ces intervalles.

— La fonction $X \rightarrow \ln(X)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

— La fonction $x \rightarrow x^2$ est continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, elle ne s'annule pas sur ces intervalles.

On conclut que d'après les propriétés de composée et de quotient de fonction,

la fonction f_1 est continue sur $] - \infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

On regarde si f_1 est continue en 0. Pour cela, on calcule la limite de f_1 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

On reconnaît en effet un taux d'accroissement. De plus $f(0) = 1$. Donc la fonction f_1 est continue en 0. En combinant les 2 résultats, on obtient que

La fonction f_1 est continue sur \mathbb{R} .

2. On montre que la fonction f_2 est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. En effet,
- La fonction $x \rightarrow 2x^2$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
 - La fonction $X \rightarrow \exp(X)$ est continue sur \mathbb{R} .
 - La fonction $x \rightarrow x$ est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, elle ne s'annule pas sur ces intervalles.

On conclut que d'après les propriétés de composée de somme et de quotient de fonction,

la fonction f_2 est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

On regarde si f_2 est continue en 0. Pour cela, on calcule la limite de f_2 . On remarque

$$\frac{\exp(2x^2) - 1}{x} = 2x \times \frac{\exp(2x^2) - 1}{2x^2}$$

Or d'après les formules du taux d'accroissement (en posant $X = 2x^2$),

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{\exp(2x^2) - 1}{2x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} x \times \frac{\exp(X) - 1}{X} = 1$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$. Par produit de limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2x^2) - 1}{x} = 0$$

De plus $f_2(0) = 0$. Donc la fonction f_2 est continue en 0. En combinant les 2 résultats, on obtient que

La fonction f_2 est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 20 (**)

1. On regarde si la fonction f_1 est prolongeable par continuité en 2. Pour cela, on remarque :

$$\frac{2-x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{x-2}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{x-2}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = 0$$

La fonction f_1 est prolongeable par continuité en 2 et l'on pose $f_1(2) = 0$.

2. On regarde si la fonction f_2 est prolongeable par continuité en 1. Pour cela, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1} &= \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{3(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)} - \frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)} \\ &= \frac{-2x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

On résout l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$. Le discriminant d'une telle équation est $\Delta = 9$. Les solutions sont 1 et $-1/2$. On a donc (cf cours sur les polynômes)

$$-2x^2 + x + 1 = -2(x - 1)(x + 1/2)$$

Ainsi,

$$\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{-2(x - 1)(x + 1/2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)} = -2 \frac{x + 1/2}{(x^2 + x + 1)(x + 1)}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)(x + 1) = 6 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = \frac{1}{12}$$

La fonction f_2 est prolongeable par continuité en 1 et l'on pose $f_2(1) = \frac{1}{12}$.

Théorème de la bijection

Exercice 21

On étudie la fonction $f : x \rightarrow \ln(x) + x$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

Or comme $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$. On calcule les limites de f :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + x = +\infty$$

Ainsi :

- La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions continues.
- La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
- On a $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection,

La fonction f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} .

Exercice 22 (*)

On remarque que

$$3 - 2x = e^x \iff e^x + 2x - 3 = 0$$

On pose alors la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = e^x + 2x - 3$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables et

$$f'(x) = e^x + 2 > 0$$

On a également, d'après les propriétés de limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Ainsi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On a donc

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} (en tant que somme de fonctions continues ou parce qu'on a montré qu'elle était dérivable)

- La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- De plus $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection,

l'équation $f(x) = 0$ (c'est à dire l'équation $3 - 2x = e^x$) possède une unique solution α dans \mathbb{R} .

On peut préciser cette solution :

$$f(0) = -2 < 0 \quad \text{et} \quad f(1) = e - 1 > 0$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$. Or comme l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une unique solution α alors $\alpha \in [0; 1]$.

On peut reprendre le même raisonnement pour montrer que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$. Je vous montre ici une autre façon de rédiger. On calcule

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{1/2} - 2 < 0$$

De plus, d'après le théorème de la bijection, f est bijective et admet une fonction réciproque strictement croissante. Ainsi,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \leq f(1) &\iff f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(\alpha) \leq f(1) \\ &\iff f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq f^{-1}(f(\alpha)) \leq f^{-1}(f(1)) \\ &\iff \boxed{\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1} \end{aligned}$$

Exercice 23 (**)

Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5 \ln(x + 3) - x$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que somme et composée de fonction dérivable. On calcule pour $x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{-x+2}{x+3}$$

Sur $[0; +\infty[$, $x + 3 > 0$. Le signe de la dérivée ne dépend que de $-x + 2$. Ainsi,

$$f'(x) \geq 0 \text{ pour } x \in [0; 2] \text{ et } f'(x) \leq 0 \text{ pour } x \in [2; +\infty[.$$

2. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \ln(x + 3) - x \\ &= 5 \ln\left(x \left(1 + \frac{3}{x}\right)\right) - x \\ &= 5 \ln(x) + 5 \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) - x \\ &= x \left(\frac{5 \ln(x)}{x} - 1\right) + 5 \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. On dresse le tableau de signe

x	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$5 \ln(3)$	$5 \ln(5) - 2$	$-\infty$

4. La fonction est continue et strictement croissante sur $[0, 2]$ or donc elle admet un minimum en $x = 0$ et $f(0) = 5 \ln(3) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $[0, 2]$. On étudie alors la fonction sur $[2; +\infty[$:

— La fonction est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$.

— La fonction est continue sur $[2; +\infty[$ (notamment parce qu'elle est dérivable sur $[0; +\infty[$).

— On a $f([2, +\infty[) =]-\infty; 5 \ln(5) - 2]$

Or comme $0 \in]-\infty; 5 \ln(5) - 2]$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $[2; +\infty[$ et donc

$$\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ a une unique solution sur } [0; +\infty[.$$

Manipuler les fonctions réciproques

Exercice 24

On étudie la fonction g . Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -e^{-x} < 0$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Ainsi,

— La fonction f est continue sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions continues sur \mathbb{R} .

— La fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

— $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$

Donc d'après le théorème de la bijection,

$$\text{la fonction } g \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } [0; +\infty[.$$

Cette fonction admet donc une fonction réciproque g^{-1} strictement décroissante et vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = -\infty$$

On en déduit alors le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
Variations de f^{-1}	$+\infty$	$-\infty$

Exercice 25 (*)

La fonction $sh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. La fonction sh est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme et composée de fonctions dérivable sur \mathbb{R} .
On calcule pour $x \in \mathbb{R}$,

$$sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} sh(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = +\infty$$

- La fonction sh est continue sur \mathbb{R} en tant que somme et composée de fonctions continues.
- La fonction sh est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- $sh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Donc, d'après le théorème de la bijection,

la fonction sh est bijective sur \mathbb{R} .

2. On résout pour $y \in \mathbb{R}$, l'équation

$$\begin{aligned} sh(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\iff e^x - e^{-x} = 2y \end{aligned}$$

Donc en posant $X = e^x > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} sh(x) = y &\iff X - \frac{1}{X} = 2y, \quad X > 0 \\ &\iff X^2 - 2yX - 1 = 0, \quad X > 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2y)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$. Cette équation a donc deux solutions :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2y - \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} \\ &= \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} \\ &= y - \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Or, si $y < 0$, alors cette quantité est clairement négative. Si $y > 0$ alors

$$\begin{aligned} y^2 + 1 > y^2 &\iff \sqrt{y^2 + 1} > |y| \\ &\iff 0 > y - \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Donc dans les deux cas, cette solution est négative et donc ne convient pas. La deuxième solution est

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{2y + \sqrt{4(y^2 + 1)}}{2} \\ &= \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} \\ &= y + \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire, on remarque que cette solution est toujours positive. Finalement,

$$\begin{aligned}sh(x) = y &\iff X = y + \sqrt{y^2 + 1}, \quad X > 0 \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ &\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})\end{aligned}$$

On en déduit que

la fonction $y \rightarrow \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ est la fonction réciproque de sh .

Exercice 26 ()**

Corrigé dans le DM 8